5 класс (продолжительность — 3 часа)

5-1. На дереве сидят красные, синие и зелёные попугаи. Каждый попугай видит хотя бы 10 синих, хотя бы 15 красных и хотя бы 20 зелёных попугаев (сам себя попугай не видит!). Какое наименьшее количество попугаев может сидеть на дереве?

Ответ. 48.

Решение. Рассмотрим какого-нибудь синего попугая. Поскольку он видит хотя бы 10 синих попугаев, то всего хотя бы 11 синих попугаев. Аналогично, на дереве хотя бы 16 красных и хотя бы 21 зелёных попугаев. Таким образом, всего хотя бы $11 + 16 + 21 = 48$ попугаев.

Ситуация, когда на дереве ровно 11 синих, 16 красных и 21 зелёный попугай, подходит под условие.

5-2. В гостях у бабушки внуки угощались пирожками. И Боря, и Коля взяли по 2 пирожка каждого вида, но съели только по 10 пирожков. Остальные пирожки они принесли домой. Боря принес домой пирожки ровно трёх видов, а Коля — ровно шести видов. Сколько видов пирожков испекла бабушка?

Ответ. 8.

Решение. Боря и Коля взяли поровну пирожков и съели поровну, значит, принесли домой поровну. Коля принёс как минимум 6. Значит, Боря тоже, но он принёс пирожки лишь трёх видов и каждого вида не больше двух пирожков. Значит, Боря принёс ровно 6 пирожков. Он взял на 10 пирожков больше, то есть 16. Значит, было 8 видов пирожков.

5-3. Коля написал на доске десятизначное число. Все его цифры различны. Могло ли ли оказаться, что, вычеркнув две его последние цифры, получим число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получим число, делящееся на 3, ..., вычеркнув 9 его последних цифр, получим число, делящееся на 9?

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Предположим, что условия про делимость выполняются. Вычеркнем из числа 9 последних цифр, останется только первая. Она делится на 9, значит, равна 9. Припишем к ней вторую цифру, получится число от 90 до 99. По условию оно должно делиться на 8, а такое число только одно, 96. Припишем третью цифру, получится число от 960 до 969. Только одно из них, 966, делится на 7. Значит, не все цифры различны, и такого быть не может.

5-4. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

Решение. Предположим, что на доске остались черная и белая фишки. Они не могут оказаться в одной строке или в одном столбце. Тогда рассмотрим клетку, расположенную в одном столбце с черной фишкой и в одной строке с белой. В ней не могло быть фишки никакого цвета.

5-5. В компании 99 человек. Каждый либо соглашатель, либо вредина. Всех по очереди спросили, кого в компании больше — соглашателей или вредин. Каждый, кроме первого, отвечал по правилу: соглашатель отвечал так же, как предыдущий отвечающий, а вредина отвечал наоборот. Оказалось, что 75 человек ответили неверно. Кого в компании было больше: вредин или соглашателей?

Ответ. Вредин больше.

Решение. Если вредин хотя бы 50, то хотя бы 25 и них ответили верно, так как каждый следующий вредина отвечал не так, как предыдущий. Но так не могло быть, ведь было 75 неверных ответов.

Отметим, что описанная в условии задачи ситуация возможна. Пусть в очереди стоят 49 вредин, за ними 50 соглашателей. Первый вредина отвечает неверно. Тогда неверно ответят 25 вредин и 50 соглашателей.

5-6. На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

Решение. Первый может выиграть. Сначала он соединяет отрезком две соседние точки A и B. Затем он разобьет на пары отрезки вида XA и XB. Второй игрок проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Затем снова — первый проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Тем самым первый выигрывает, так как игра рано или поздно закончится, и у него всегда есть ответный ход.

Замечание. При такой стратегии первого никогда не будут проводиться отрезки, оба конца которых отличны от A и B.

6 класс (продолжительность — 3 часа)

6-1. На круговой трассе, по которой с постоянной скоростью гуляет Иван Иванович, расположено три дерева. Иван Иванович выходит от одного дерева в 8:00. Дойдя до очередного дерева, он либо идет дальше, либо разворачивается в противоположную сторону. А в блокнот записывает время прохождения дерева. В результаты у него в блокноте оказались записи: 8:05, 8:12, 8:19, 8:26, 8:36. За сколько времени Иван Иванович прошел бы весь круг, если бы шел в одну сторону?

Ответ. За 22 минуты.

Решение. Три дерева разбивают трассу на три участка. Из записей видно, что есть участки, которые он проехал за 5 минут (с 8:00 до 8:05), 7 минут (с 8:05 до 8:12) и 10 минут (с 8:26 до 8:36). Очевидно, это три разных участка, и Иван Иванович пройдет составленный из них круг за $5+7+10 = 22$ минуты.

6-2. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

Решение. Предположим, что на доске остались черная и белая фишки. Они не могут оказаться в одной строке или в одном столбце. Тогда рассмотрим клетку, расположенную в одном столбце с черной фишкой и в одной строке с белой. В ней не могло быть фишки никакого цвета.

6-3. В турнире по по перетягиванию каната каждый сыграл с каждым по разу. Оказалось, что все выиграли поровну игр. На следующий день к участникам добавился один игрок, и снова был проведен турнир, где каждый сыграл с каждым по разу. Могло ли оказаться так, что и во второй день все выиграли поровну игр? В перетягивании каната ничьих не бывает.

Решение. Пусть изначально было N участников. Тогда каждый всего было $N(N-1)/2$ игр, значит, каждый выиграл по $(N-1)/2$ игр. Аналогично, во второй день каждый выиграл $N/2$ игр. Но оба эти числа одновременно целыми не бывают.

6-4. В школе много 6-х классов, в каждом поровну учеников. Оказалось, что в 6А учатся $1/9$ всех девочек-шестиклассниц и $1/11$ всех мальчиков-шестиклассников. Докажите, что в нём поровну мальчиков и девочек.

Решение. Пусть в 6А учатся М мальчиков и Д девочек. Тогда в классе М+Д учеников, а всего в школе 9Д + 11М шестиклассников. Если классов не больше 9, то всего учеников не больше 9(М + Д) (противоречие), а если классов не меньше 11, то учеников не меньше 11(М + Д) (снова противоречие). Значит, классов 10 и 9Д + 11М = 10Д + 10М, откуда М = Д.

6-5. На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

Решение. Первый может выиграть. Сначала он соединяет отрезком две соседние точки A и B. Затем он разобьет на пары отрезки вида XA и XB. Второй игрок проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Затем снова — первый проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Тем самым первый выигрывает, так как игра рано или поздно закончится, и у него всегда есть ответный ход.

Замечание. При такой стратегии первого никогда не будут проводиться отрезки, оба конца которых отличны от A и B.

6-6. На длинном проводе сидят птицы. За ход между каждыми двумя соседними птицами прилетает одно и то же количество новых птиц: 3, 4 или 5 птиц. При разных ходах это может быть разное количество. Может ли через несколько ходов (больше одного) на проводе оказаться 333444555 птиц?

Решение. Если отбросить самую правую птицу, то за ход число остальных птиц увеличивается в 4, 5 или 6 раз. Но число 333444554 не делится ни на 4, ни на 5, ни на 6.

7 класс (продолжительность — 4 часа)

7-1. Даша поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зелёную тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зелёной — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зеленой тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ. Одна.

Решение. Так как $129 + 72 > 200$, синяя тарелка, правее которой лежит 72 конфетки, стоит левее красной, левее которой 129 конфеток, и между ними есть хотя бы одна тарелка. Конфетки на тарелках, стоящих между упомянутыми красной и синей, в сумме $129 + 72 = 201$ учтены дважды, а остальные конфетки – по одному разу. Значит, на всех этих тарелках в сумме — одна конфетка. Так как пустых тарелок нет, там ровно одна тарелка, и на ней — одна конфетка. Эта тарелка — зеленая, иначе зеленая тарелка была бы пуста.

7-2. Вася рассматривает натуральные числа, начиная с 2, в порядке 2, 3, 4, 5,. . . , и для каждого числа записывает на доску, произведением скольких простых чисел оно является. Например, для числа 12 Вася напишет на доску 3, так как $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, а для числа 13 Вася напишет на доску 1. В какой-то момент Вася впервые записал на доску число 100. Следующее записанное число будет больше 100, равно 100 или меньше 100?

Решение. Заметим, что Вася в первый раз напишет число 100 для числа 2^{100}. Следующее число со 100 простыми множителями будет $2 \cdot 2^{99}$, а первое число со 101 делителем будет 2^{101}. Число $2^{100}+1$ явно меньше этих двух чисел, поэтому Вася напишет на доску число, меньшее 100.

7-3. На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

Решение. Первый может выиграть. Сначала он соединяет отрезком две соседние точки A и B. Затем он разобьет на пары отрезки вида XA и XB. Второй игрок проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Затем снова — первый проводит один из отрезков, а первый проводит парный к нему. Тем самым первый выигрывает, так как игра рано или поздно закончится, и у него всегда есть ответный ход.

Замечание. При такой стратегии первого никогда не будут проводиться отрезки, оба конца которых отличны от A и B.

7-4. Дан треугольник ABC. На стороне BC выбрана точка E, на стороне AC выбрана точка D, при этом оказалось, что $AD = EC$, $BD = DE$ и $\angle CDB = \angle BED$. Найдите длину стороны AC, если $AB = 20$, $BE = 7$.

Ответ. 33.

Решение. Заметим, что $\triangle ADB = \triangle CED$ первому признаку, поскольку $AD = CE$, $BD = DE$ и $\angle ADB = \angle BCA$. Поэтому $AB = CD$ и $\angle BAC = \angle BCA$. Из последнего следует, что треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$), и $EC = BC - BE = BA - BE = 20 - 7 = 13$. Наконец, $AC = AD + DC = CE + AB = 13 + 20 = 33$.

7-5. Клетки доски 50×50 покрашены в 10 цветов. Назовём клетку удивительной, если как в её строке, так и в её столбце нет клеток того же цвета. Какое наибольшее количество удивительных клеток может быть в таблице?

Ответ. $50 \cdot 9 = 450$.

Решение. Заметим, что в каждой строке не более 9 удивительных клеток: иначе в ней по одной клетке десяти разных цветов – а каких же цветов тогда другие клетки строки? Поэтому всего будет не более 450 удивительных клеток.

Пример на 450 удивительных клеток получается так: надо взять 9 обобщенных диагоналей, каждую покрасить в свой цвет. А все остальные клетки пусть будут 10-го цвета.

7-6. По кругу написаны 100 ненулевых чисел. Петя хочет сделать так, чтобы сумма произведений 100 пар соседних чисел была бы неотрицательной, и для этого он может поменять знаки знаки у любых k чисел по кругу. При каком наименьшем k Петя всегда сможет добиться своей цели?

Ответ. 25.

Решение. Пусть по кругу, чередуясь, стоят числа 1 и -1, сумму произведений пар соседних будем обозначать через S. Тогда изначально $S = -100$. Меняя знак у одного числа, мы меняем S не более чем на 4. Значит, чтобы изменить её хотя бы на 100, потребуется изменить знак хотя бы у 25 чисел.

Покажем теперь, что 25 смен знака всегда хватает. Пронумеруем числа по кругу. Пусть если мы поменяли знак у чисел с номерами $2, 4, \ldots, 50$ получилась сумма S_1, а если у чисел с номерами $52, 54, \ldots, 100$, то S_2. Заметим, что $S_1 + S_2 = 0$, так как каждое произведение соседних в одной сумме участвует со знаком $+$, а в другом — со знаком $-$. Тогда хотя бы одна из этих сумм неотрицательна, и цель Пети достигнута.

8 класс (продолжительность — 4 часа)

8-1. Даша поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зелёную тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зелёной — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зеленой тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ. Одна.

Решение. Так как $129 + 72 > 200$, синяя тарелка, правее которой лежит 72 конфетки, стоит левее красной, левее которой 129 конфеток, и между ними есть хотя бы одна тарелка. Конфетки на тарелках, стоящих между упомянутыми красной и синей, в сумме $129 + 72 = 201$ учтены дважды, а остальные конфетки – по одному разу. Значит, на всех этих тарелках в сумме — одна конфетка. Так как пустых тарелок нет, там ровно одна тарелка, и на ней — одна конфетка. Эта тарелка — зеленая, иначе зеленая тарелка была бы пуста.

8-2. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трёх чисел быть целым числом?

Решение. Пусть даны числа a, b, c, удовлетворяющие условию задачи. Если суммы $a + b$ и $a + c$ целые, то целым числом является и разность $(a+b)-(a+c) = b-c$, а с ней и число $(b-c)+(b+c) = 2b$. Так как число b — нецелое, то $b = k/2$, где k — нечётное целое. Аналогично для a и c. Но тогда abc равно дроби с нечётным числителем и знаменателем 8, которая, очевидно, не является целым числом.

8-3. У Маши есть N карточек, на каждой написано натуральное число. Маша выписала все числа, являющиеся суммами чисел на двух карточках. Оказалось, что среди выписанных чисел есть число с последней цифрой 0, есть число с последней цифрой 1; . . . ; есть число с последней цифрой 9. Иначе говоря, есть число с любой последней цифрой. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ. 6.

Решение. Пример 6-ти карточек: 1, 2, 4, 6, 8, 10 или 1, 2, 3, 4, 5, 9.

Меньше, чем 5 карточек не хватит, так как будет выписано меньше 10 чисел. Почему не хватит 5 карточек? При 5-ти карточках всего будет 10 сумм, которые оканчиваются на 0, на 1,. . . , на 9. Поэтому сумма всех этих сумм будет нечётной. С другой стороны, каждая карточка входит в сумму этих сумм 4 раза, поэтому сумма сумм должна делится на 4 — противоречие с тем, что она нечётная.

8-4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, пересекающиеся в точке I. Через точку C_1 провели прямую, перпендикулярную AI, а через точку A_1 провели прямую, перпендикулярную CI. Эти две прямые пересеклись в точке T. Докажите, что середина отрезка IT лежит на AC

Решение. Заметим, что $\angle AIC = 90° + \angle B/2 = 135°$, а $\angle AIC_1 = 45°$. Пусть данные прямые пересекают сторону AC в точках M и N соответственно. Докажем, что $MINT$ — параллелограмм, откуда следует утверждение задачи (свойство диагоналей параллелограмма). Заметим, что треугольник C_1AM –равнобедренный (биссектриса совпадает с высотой). Тогда треугольник C_1IM —также равнобедренный с основанием C_1M. Но $\angle AIC_1 = 45°$, то есть $\angle CIM = 90°$. Следовательно, прямые MI и TA_1 параллельны. Аналогично, $NI||C_1T$, то есть $MINT$ — параллелограмм, что и требовалось.

8-5. По кругу написаны 100 ненулевых чисел. Петя хочет сделать так, чтобы сумма произведений 100 пар соседних чисел была бы неотрицательной, и для этого он может поменять знаки знаки у любых k чисел по кругу. При каком наименьшем k Петя всегда сможет добиться своей цели?

Ответ. 25.

Решение. Пусть по кругу, чередуясь, стоят числа 1 и -1, сумму произведений пар соседних будем обозначать через S. Тогда изначально $S = -100$. Меняя знак у одного числа, мы меняем S не более чем на 4. Значит, чтобы изменить её хотя бы на 100, потребуется изменить знак хотя бы у 25 чисел.

Покажем теперь, что 25 смен знака всегда хватает. Пронумеруем числа по кругу. Пусть если мы поменяли знак у чисел с номерами $2, 4, \ldots, 50$ получилась сумма S_1, а если у чисел с номерами $52, 54, \ldots, 100$, то S_2. Заметим, что $S_1 + S_2 = 0$, так как каждое произведение соседних в одной сумме участвует со знаком $+$, а в другом — со знаком $-$. Тогда хотя бы одна из этих сумм неотрицательна, и цель Пети достигнута.

8-6. Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Аня и Боря играют в игру на доске $n \times n$, где каждый квадрат окрашен в красный или синий цвет. Ане разрешено как угодно переставлять строки, а Боре разрешено как угодно переставлять столбцы. Раскраска таблицы называется **устойчивой**, если:

• независимо от того, как Аня переставит строки, Боря сможет затем переставить столбцы, чтобы восстановить исходную раскраску;

• и независимо от того, как Боря переставит столбцы, Аня затем сможет переставить строки, чтобы восстановить исходную раскраску. Сколько существует устойчивых раскрасок доски $n \times n$?

Ответ. $2n! + 2$

Решение. Заметим, что подходят все одноцветных раскраски (их 2), все раскраски, в которых в каждой строке и в каждом столбце ровно 1 синяя клетка (их $n!$) и все раскраски, в которых в каждой строке и в каждом столбце ровно 1 красная клетка (их $n!$).

Покажем, что другие раскраски не не подходят. Заметим, что если в любом столбце как угодно переставить клетки (чего можно добиться перестановкой строк), то получится какой-то другой имеющийся столбец! И если в столбце k синих клеток, то всего имеется C_n^k перестановок клеток в этом столбце. Поэтому должно быть $C_n^k \leqslant n$, что для $k \neq 0, 1, n-1, n$ невозможно.

А если $k = 1$ или $k = n - 1$, то имеется как раз n перестановок клеток в столбце с k синими клетками. Значит, должно быть ровно n различных столбцов с k синими клетками. То есть в каждом столбце должно быть одно и то же количество синих клеток, равное 1 или $n - 1$, и все столбцы при этом разные (если есть хоть один такой столбец). Тем самым получаются как раз все раскраски из примеров.